Sur la stabilité conditionnelle par rapport aux perturbations permanentes.

Par C. CORDUNEANU à Jassy (Roumanie).

Dans un travail précédent [2], nous avons défini la notion de stabilité conditionnelle par rapport aux perturbations permanentes, en illustrant cette définition dans le cas des systèmes différentiels presque-linéaires.

Nous allons considérer maintenant des systèmes différentiels de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_i) + R_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (1 \leqq i \leqq n) \tag{1}$$

sous des hypothèses qui assurent l'existence d'une famille de solutions bornées sur le demi-axe $t \geqq t_0$.

Les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ seront supposées fixées pendant que les fonctions $R_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ seront interprétées comme des termes perturbateurs.

Le caractère conditionnel de la stabilité résultera du fait que, dans sa définition, on engage seulement les solutions bornées des systèmes de la forme (1).

1. Pour démontrer l'existence des solutions bornées des systèmes de la forme (1), nous aurons besoin de certains résultats que nous avons établis antérieurement [3].

Supposons que la fonction $f(t, x)$ satisfait aux conditions suivantes:

a) elle est continue dans le domaine $t \geqq t_0$, $|x| \leqq H$;

b) elle admet une dérivée par rapport à x, telle que $0 < m \leqq \dfrac{\partial f}{\partial x} \leqq M$ dans tout le domaine de définition;

c) $|f(t, 0)| \leqq K \leqq mH$ pour $t \geqq t_0$.

Alors, l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2}$$

admet une seule solution $x(t)$, définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$, telle que $|x(t)| \leqq H$. Cette solution satisfait à l'inégalité

$$|x(t)| \leqq \frac{K}{m}, \qquad t \geqq t_0. \tag{3}$$

Lemme 1. *Soit* $f_n(t, x)$ $(n \geqq 1)$ *une suite de fonctions satisfaisant aux conditions* a), b), c), *et soit* $x_n(t)$ $(n \geqq 1)$ *la solution de l'équation*

$$\frac{dx}{dt} = f_n(t, x), \tag{4}$$

satisfaisant à la limitation (3). *Admettons que*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t, x) = f(t, x), \tag{5}$$

uniformément dans tout domaine $t_0 \leqq t \leqq t_1$, $|x| \leqq H$. *Si* $f(t, x)$ *satisfait à la condition* b) *avec* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *continue, on a*

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t), \tag{6}$$

uniformément sur tout intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$, $x(t)$ *étant la solution de l'équation* (2) *pour laquelle l'inégalité* (3) *est satisfaite.*

Démonstration. Tout d'abord remarquons que la fonction $f(t, x)$ satisfait elle-même aux conditions a) et c). Par conséquent, il existe une seule solution $x(t)$ de l'équation (2), satisfaisant à la condition (3). On peut écrire

$$\frac{d(x-x_n)}{dt} = f(t, x) - f(t, x_n) + f(t, x_n) - f_n(t, x_n) \qquad (n \geqq 1).$$

Mais $f(t, x) - f(t, x_n) = \varphi_n(t)(x - x_n)$, $\varphi_n(t)$ étant des fonctions continues sur le demi-axe $t \geqq t_0$, telles que $0 < m \leqq \varphi_n(t) \leqq M$, $n \geqq 1$. La fonction $x - x_n$ satisfait donc à l'équation linéaire

$$\frac{d(x-x_n)}{dt} = \varphi_n(t)(x - x_n) + f(t, x_n) - f_n(t, x_n). \tag{7}$$

Les hypothèses admises assurent l'existence d'un nombre positif K_1, tel que

$$|f(t, x_n(t)) - f_n(t, x_n(t))| \leqq K_1 \qquad (t \geqq t_0,\ n \geqq 1), \tag{8}$$

ce qui nous permet de représenter la fonction $x - x_n$ $(n \geqq 1)$ à l'aide de la formule

$$x(t) - x_n(t) = -\int_t^\infty \exp\left(-\int_t^\tau \varphi_n(\theta)\, d\theta\right) \{f_n(\tau, x_n(\tau)) - f_n(\tau, x_n(\tau))\}\, d\tau. \tag{9}$$

Fixons maintenant un intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$ et soit $T > t_1$. Si $t_0 \leqq t \leqq T$, alors

$$|x(t) - x_n(t)| \leqq \int_t^T |f(\tau, x_n(\tau)) - f_n(\tau, x_n(\tau))|\, d\tau + K_1 \int_T^\infty e^{-m(\tau - t)}\, d\tau. \tag{10}$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Choisissons T suffisamment grand, tel que

$$(11) \qquad K_1 \int_T^\infty e^{-m(\tau-t_1)}\, d\tau = \frac{K_1}{m} e^{-m(T-t_1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après (5), on peut trouver un entier $N(\varepsilon, t_1)$ tel qu'on ait dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$

$$(12) \qquad |f(t, x_n(t)) - f_n(t, x_n(t))| < \frac{\varepsilon}{2(T-t_0)},$$

dès que $n \geqq N(\varepsilon, t_1)$.

En tenant compte des relations (10), (11) et (12), il résulte

$$(13) \qquad |x(t) - x_n(t)| < \varepsilon \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1, \; n \geqq N(\varepsilon, t_1),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Supposons maintenant que la fonction $f(t, x)$ satisfait à la condition a), et en outre aux conditions suivantes:

b$_1$) Elle admet une dérivée par rapport à x, telle que $-M \leqq \frac{\partial f}{\partial x} \leqq$ $\leqq -m < 0$, dans tout le domaine de définition;

c$_1$) $|f(t, 0)| \leqq K < mH$ pour $t \geqq t_0$.

Alors, l'équation (2) admet une seule solution $x(t)$ définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$, avec $|x(t)| \leqq H$, satisfaisant à la condition initiale

$$(14) \qquad x(t_0) = x_0,$$

dès que

$$(15) \qquad |x_0| \leqq H - \frac{K}{m}.$$

Plus précisément, cette solution satisfait à l'inégalité

$$(16) \qquad |x(t)| \leqq |x_0| + \frac{K}{m}, \qquad t \geqq t_0.$$

R e m a r q u e. On peut énoncer un lemme analogue au lemme 1, en remplaçant les conditions a), b) c) par les conditions a), b$_1$), c$_1$). Cela résulte directement des théorèmes généraux sur la dépendance continue de la solution par rapport aux seconds membres des équations (sur tout intervalle fini).

2. Considérons maintenant des systèmes différentiels de la forme

$$(17) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_i) + h_i(t) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

sous les hypothèses suivantes:

α) Les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ sont continues dans le domaine $t \geqq t_0$, $|x_i| \leqq H$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

β) Chaque fonction $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ admet une dérivée par rapport à x_i, satisfaisant à l'une ou l'autre des conditions:

(A) $$-M \leqq \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqq -m < 0,$$

(B) $$0 < m \leqq \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqq M.$$

Nous allons désigner par i_A un indice quelconque pour lequel la condition (A) est satisfaite. i_B aura une signification analogue.

γ) $$f_1(t, 0) = 0, \ |f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0)| \leqq L \sum_{j=1}^{i-1} |x_j| \ (2 \leqq i \leqq n),$$
L étant une constante positive.

En ce qui concerne les fonctions $h_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ nous ferons des précisions ci-dessous.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les notations suivantes: si $f(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ est une fonction-vecteur bornée sur le demi-axe $t \geqq t_0$, alors $\|f_i\| = \sup_{t \geqq t_0} |f_i(t)|$, $\|f\| = \max_i \|f_i\|$.

Lemme 2. *Admettons les hypothèses* α), β), γ). *De plus, les fonctions* $h_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ *soient continues et bornées sur le demi-axe* $t \geqq t_0$.

Le système différentiel (17) *admet alors une seule solution* $x(t)$ *définie sur le demi-axe* $t \geqq t_0$, *telle que*

(18) $$x_i(t_0) = x_i^0, \qquad i = i_A,$$

dès que $\|h\|$ *et* $\sum_{j=i_A} |x_j^0|$ *sont suffisamment petits. Cette solution satisfait à l'inégalité*

(19) $$\|x\| \leqq P \sum_{j=i_A} |x_j^0| + Q \|h\|,$$

P et Q étant deux nombres positifs qui dépendent seulement de L et m.

Démonstration. Considérons tout d'abord la première équation du systéme (17):

(20) $$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1) + h_1(t).$$

En tenant compte des hypothèses α), β), γ) et du fait que x_1^0 et $h(t)$ sont assez petits, il résulte que l'équation (20) admet une seule solution $x_1(t)$, définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$ et satisfaisant à la condition $|x_1(t)| \leqq H$, quand l'indice 1 est un i_B. Quand l'indice 1 est un i_A, l'équation (20) admettra aussi une seule solution $x_1(t)$, définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$ et satisfaisant à la limitation $|x_1(t)| \leqq H$, telle que $x_1(t_0) = x_1^0$.

Soit $\varepsilon_i = 1$ pour $i = i_A$ et $\varepsilon_i = 0$ pour $i = i_B$.

Les inégalités (3) et (16) nous permettent d'écrire

$$\|x_1\| \leqq \varepsilon_1 |x_1^0| + \frac{\|h\|}{m}. \tag{21}$$

$x_1(t)$ étant déterminé, la deuxième équation du système (17) contiendra seulement l'inconnue $x_2(t)$. Si l'indice 2 est un i_B, $x_2(t)$ sera uniquement déterminé. Si l'indice 2 est un i_A, il faudra tenir compte des conditions (18).

En tenant compte de l'inégalité (21), on peut écrire

$$\|x_2\| \leqq \varepsilon_2 |x_2^0| + \frac{L}{m}\varepsilon_1 |x_1^0| + \frac{\|h\|}{m}\left(1 + \frac{L}{m}\right). \tag{22}$$

Un raisonnement par récurrence nous montre que les fonctions $x_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ sont uniquement déterminées à l'aide du système (17) et des conditions (18). De plus, les inégalités

$$\|x_i\| \leqq \sum_{j = i_A \leqq i} \varepsilon_j \left(\frac{L}{m}\right)^{i-j} |x_j^0| + \frac{\|h\|}{m} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{L}{m}\right)^j \qquad (1 \leqq i \leqq n) \tag{23}$$

sont vérifiées. Si nous posons

$$P = \max\left\{1, \left(\frac{L}{m}\right)^{n-1}\right\}, \qquad Q = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{L}{m}\right)^j, \tag{24}$$

on aura

$$\|x\| \leqq P \sum_{j = i_A} |x_j^0| + Q\|h\|,$$

c'est-à-dire, l'inégalité (19).

Il résulte, en tenant compte des considérations faites ci-dessus, qu'il suffit d'admettre

$$P \sum_{j = i_A} |x_j^0| + Q\|h\| \leqq H.. \tag{25}$$

C'est justement la précision des limites supérieures pour les grandeurs $\sum_{j=i_A} |x_j^0|$ et $\|h\|$.

Le lemme 2 nous permet de démontrer sans difficulté un théorème de stabilité conditionnelle par rapport aux perturbations permanentes. Mais, il se montre utile encore dans la démonstration d'un théorème d'existence.

3. Envisageons maintenant les systèmes différentielles de la forme (1).

T h é o r è m e 1. *Supposons que les fonctions* $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ *satisfont aux conditions* α), β), γ), *et que les dérivées* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ *sont continues. Supposons encore que les fonctions* $R_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ *sont* *continues et bornées dans le domaine* $t \geqq t_0$, $|x_i| \leqq H$ $(1 \leqq i \leqq n)$ *et y vérifient l'inégalité*

$$(26) \qquad QR < H \quad \text{où} \quad R = \max_i \{\sup |R_i(t, x, \ldots, x_n)|\}.$$

Il existe alors au moins une solution $x(t)$ *du système* (1), *définie sur le demi-axe* $t \geqq t_0$, *satisfaisant aux conditions* (18), *dès que*

$$(27) \qquad P \sum_{j=i_A} |x_j^0| \leqq H - QR.$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous allons utiliser le théorème de SCHAUDER et TYCHONOFF sur l'existence des points invariants. Remarquons tout d'abord que les solutions du système (1) sont des applications continues du demi-axe $t \geqq t_0$ dans l'espace euclidien à n dimensions R^n. Par conséquent, l'espace $C_0([t_0, +\infty), R^n)$ s'impose d'une façon naturelle. C'est l'espace vectoriel des applications continues du demi-axe $t \geqq t_0$, dans R^n, avec la topologie de la convergence compacte ([1]), p. 13). Il faut remarquer que l'espace $C_0([t_0, +\infty), R^n)$ est localement convexe et métrisable. Cette dernière propriété nous permet l'utilisation des suites dénombrables.

Considérons l'ensemble M des applications $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_n(t)\} \in \in C_0([t_0, +\infty), R^n)$, telles que $|u_i(t)| \leqq H$ pour $t \geqq t_0$, $1 \leqq i \leqq n$. L'ensemble M est un sous-ensemble convexe de l'espace $C_c([t_0, +\infty), R^n)$.

Pour tout $u \in M$, soit $Au = x = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ la solution du système

$$(28) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_i) + R_i(t, u_1, \ldots, u_n) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

satisfaisant aux conditions initiales (18) et telle que $|x_i(t)| \leqq H$, $1 \leqq i \leqq n$. L'existence et l'unicité de telle solution est assurée, en vertu du lemme 2, par les hypothèses α), β), γ) et par les inégalités (26) et (27).

Il est évident que

$$(29) \qquad AM \subset M.$$

Nous nous proposons maintenant de montrer la continuité de l'opérateur A. Soit donc $u_1^{(k)}(t) = \{u_1^{(k)}(t), \ldots, u_n^{(k)}(t)\}$ $(k \geqq 1)$, une suite d'éléments appartenant à M et soit $Au^{(k)} = x^{(k)}(t) = \{x_1^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t)\}$. Si $\lim_{k \to \infty} u^{(k)} = u$ dans le sens de la convergence compacte, c'est-à-dire uniformément sur tout intervalle fini, il faut montrer que $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x = Au$, dans le même sens. Cela veut dire que

$$(30) \qquad \lim_{k \to \infty} x_i^{(k)}(t) = x_i(t) \qquad (1 \leqq i \leqq n),$$

uniformément sur tout intervalle fini. Maintenant, tout est réduit au lemme 1 et aux théorèmes sur la dépendance continue de la solution par rapport aux seconds membres des équations. Pour en déduire (30), on appliquera un raisonnement inductif sur i.

Enfin, l'ensemble AM est compact dans l'espace $C_0([t_0, +\infty), R^n)$. En effet, les fonctions $x_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, pour $x \in AM$, sont uniformément bornées, ainsi que leurs premières dérivées, sur tout le demi-axe $t \geqq t_0$. Par conséquent, elles constituent une famille équicontinue. Le théorème d'ASCOLI ([1] p. 43) nous permet d'affirmer que l'ensemble AM est relativement compact. Mais, l'ensemble AM est fermé dans l'espace $C_0([t_0, +\infty), R^n)$, étant l'image continue d'un ensemble fermé.

Toutes les conditions du théorème de SCHAUDER et TYCHONOFF étant satisfaites, par l'opérateur A et par l'ensemble M, on peut affirmer l'existence d'une application $x(t)$, telle que $Ax = x$. Les équations (18) nous montrent que cette application est une solution du système (1), ce qu'il fallait démontrer.

4. Considérons le système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_i) \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{31}$$

dans lequel les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ satisfont aux conditions α), β) et γ).

D'après le lemme 2, $x(t) \equiv 0$ est la seule solution du système (31), satisfaisant aux conditions initiales

$$x_i(t_0) = 0, \qquad i = i_A. \tag{32}$$

Le système (31) admet aussi une solution unique $x(t)$, définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$, satisfaisant aux conditions (18), dès que

$$P \sum_{j = i_A} |x_j^0| \leqq H.$$

Mais, la stabilité de telle solution revient à la stabilité de la solution banale.

Théorème 2. *Soient* $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, *des fonctions satisfaisant aux conditions* α), β) *et* γ). *Alors, quel que soit* $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < H)$, *on peut trouver deux nombres positifs* $\delta(\varepsilon)$ *et* $\eta(\varepsilon)$, *avec les propriétés suivantes:*

Pour tout système de nombres x_j^0 $(j = i_A)$ *tel que*

$$\sum_{j = i_A} |x_j^0| < \delta(\varepsilon), \tag{33}$$

et fonctions $R_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, *continues dans le domaine* $t \geqq t_0$, $|x_i| \leqq H$ $(1 \leqq i \leqq n)$, *telles que*

$$|R_i(t, x_1, \ldots, x_n)| < \eta(\varepsilon), \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{34}$$

toute solution $x(t)$ *du système* (1), *définie sur le demi-axe* $t \geqq t_0$ *et satisfaisant aux conditions* (18), *satisfait aussi à l'inégalité*

$$\|x\| < \varepsilon. \tag{35}$$

Démonstration. Soit $x(t)$ une solution du système (1), définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$ et satisfaisant aux conditions initiales (18). Posons $r_i(t) = R_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $(1 \leqq i \leqq n)$. D'après (19), (33) et (34), on peut écrire

$$\|x\| < P\delta(\varepsilon) + Q\eta(\varepsilon). \tag{36}$$

Cette inégalité nous montre que (35) est vérifiée, en prenant, par exemple,

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2P}, \qquad \eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2Q}.$$

Remarque 1. D'après le théorème 1, pour l'existence d'une solution (au moins) satisfaisant aux conditions (18), il suffit d'admettre, de plus, la continuité des derivées $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

Remarque 2. Nous n'avons fait aucune hypothèse concernant l'unicité. Par conséquent, s'il existe plusieurs solutions satisfaisant aux conditions (18), l'inégalité (35) vaut pour l'une quelconque de ces solutions, dès que (33) et (34) sont satisfaites.

Remarque 3. Les cas $f_i(t, x_1, \ldots, x_i) \equiv f_i(t, x_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ a été envisagé dans un autre travail [4].

Ouvrages cités.

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Ch. X (Paris, 1949).
[2] C. Corduneanu, Sur la notion de stabilité, *Revue de Mathématique*, **2** (1957), 497—500.
[3] C. Corduneanu, Cîteva probleme globale referitoare la ecuațiile diferențiale de ordinul 1, *Analele ştiinţifice ale Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi*, **2** (1956), 33—50.
[4] C. Corduneanu, Cîteva consideraţii în legătură cu unele sisteme de ecuaţii differenţiale, *Studii şi cercetări, Filiala Iaşi a Academiei RPR*, **7** (1956), 13—30.

UNIVERSITÉ DE JASSY,
SEMINAIRE MATHÉMATIQUE "A. MYLLER".

(Reçu le 10 avril 1958)